CHAPITRE 4 : Équation de Schrödinger

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Schrödinger

$$(LS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 & t>0, \ x \in \mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, ou de sa version non linéaire

$$(NLS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \kappa u |u|^a & t>0, x \in \mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

I) Résolution de l'équation linéaire

1) Données régulières, formule de représentation :

Idée : (LS) est une équation linéaire à coefficients constants, posée dans l'espace entier. Il est donc légitime de chercher une formule de représentation en passant en Fourier. On commence donc par faire un raisonnement formel, pour trouver une expression pour les solutions, et on montre ensuite que cette expression donne bien une solution.

Ici, si on prend (formellement) la transformée de Fourier de (LS), on obtient

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}(t,\xi) - |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

et donc

$$\hat{u}(t,\xi) = \exp(-it|\xi|^2)\,\hat{u}_0(\xi),$$

soit

$$u(t) = K(t) *_x u_0,$$

où $K(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\exp(-it|\xi|^2)\right)$.

On a le résultat suivant:

Proposition:

a) Posons $K(t,x) = \dfrac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} \exp\left(\dfrac{i|x|^2}{4t}\right)$ pour $t>0$.

Alors $\hat{K}(t,\xi) = \exp(-it|\xi|^2)$ pour $t>0$.
(au sens de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$)

b) Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On pose, pour $t>0$, $u(t) = K(t) *_x u_0$.
Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ et u est solution de (LS).

Démonstration:

a) Par définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \widehat{K}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle K, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} \exp\left(\frac{i|\xi|^2}{4t}\right) \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\langle \widehat{K}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} e^{\frac{i|\xi|^2}{4t} - \varepsilon|\xi|^2} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} e^{\frac{i|\xi|^2}{4t} - \varepsilon|\xi|^2 - i\xi x} \varphi(x)\, dx\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} \mathcal{F}\left(\xi \mapsto e^{\left(\frac{i}{4t} - \varepsilon\right)|\xi|^2}\right)(x)\, \varphi(x)\, dx$$

<u>Lemme</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

On pose
$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha|\xi|^2} e^{-i\xi\cdot x}\, d\xi$$

$$= \mathcal{F}\left(\xi \mapsto e^{-\alpha|\xi|^2}\right)(x).$$

Alors
$$f_\alpha(x) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\alpha}\right),$$

où $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{C}$ est choisi de telle sorte que $\mathrm{Arg}(\sqrt{\alpha}) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

On admet provisoirement le lemme.

On en déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \hat{K}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} \left(\frac{\pi}{\varepsilon - \frac{i}{4t}} \right)^{N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4(\varepsilon - \frac{i}{4t})}} \varphi(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + 4i\varepsilon t)^{N/2}} \exp\left(- \frac{it|x|^2}{(1+4i\varepsilon t)} \right) \varphi(x)\, dx$$

$$\underset{TCD}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-it|x|^2)\, \varphi(x)\, dx.$$

Donc $\quad \hat{K}(t, x) = \exp(-it|x|^2)$.

b) En Fourier, on a

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{K}(t, \xi)\, \hat{u}_0(\xi)$$

$$= \exp(-it|\xi|^2)\, \hat{u}_0(\xi).$$

Par conséquent, $\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et pour tout $T > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_{k,T} > 0$ tel que

$$\sum_{j=0}^{k} \sup_{0 \le t \le T} \| \partial_t^j \hat{u}(t) \|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \le C_{k,T} \|\hat{u}_0\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\le C_{k,T} \|u_0\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$$

Donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$.

Pour montrer que u est solution, on peut soit observer que $\hat{u}$ est solution de l'EDO

$$\partial_t \hat{u} = -it|\xi|^2 \hat{u}$$

soit utiliser l'identité suivante, pour $t>0$

$$i\partial_t u + \Delta u = (i\partial_t K + \Delta K) * u_0$$

et vérifier que

$$i\partial_t K + \Delta K = 0 \qquad \text{pour } t>0.$$

De plus, on observe que $\lim_{t \to 0} \hat{u}(t,\xi) = \hat{u_0}(\xi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Donc $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. ■

Preuve du Lemme:

Tout d'abord, d'après le théorème de Fubini, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi_j|^2 - i x_j \cdot \xi_j} \, d\xi_j \right)$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour $N=1$.

Si $N=1$, on a

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \xi^2 - i x \xi} \, d\xi.$$

D'après les résultats sur les intégrales à paramètre (application du théorème de convergence dominée), $f_\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$f_\alpha'(x) = \int_{\mathbb{R}} -i\xi \, e^{-\alpha\xi^2 - i x \xi} \, d\xi$$

$$f_\alpha'(x) \underset{IPP}{=} \frac{i}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\xi^2} \left(ix\, e^{-ix\xi} \right) d\xi$$

$$= -\frac{x}{2\alpha} f_\alpha(x).$$

Donc $$f_\alpha(x) = f_\alpha(0) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\alpha}\right).$$

Il reste à calculer $f_\alpha(0)$. Pour cela, on utilise le théorème de Fubini :

$$f_\alpha(0)^2 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \exp(-\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2))\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

En passant en coordonnées polaires,

$$\boxed{f_\alpha(0)^2} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r e^{-\alpha r^2} dr$$

$$= 2\pi \frac{1}{2\alpha} \boxed{= \frac{\pi}{\alpha}}.$$

Par ailleurs, on remarque que $f_\alpha(0)$ est continue en α dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\,\alpha > 0\}$, et que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(0) > 0$. Donc

$$f_\alpha(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$ où $\sqrt{\alpha}$ est tel que $\mathrm{Arg}(\sqrt{\alpha}) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Existence et unicité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

<u>Proposition</u>: Soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Alors (LS) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ au sens suivant:

- $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $t \longmapsto \langle u(t), \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est continue;

- $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, $\forall T \in \mathbb{R}$,

$$\langle u(T), \phi(T) \rangle - \langle u_0, \phi(0) \rangle = \int_0^T \langle u(t), (\partial_t \phi - i \Delta \phi)(t) \rangle \, dt .$$

Cette solution est donnée par

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-it|\xi|^2} \, \hat{u}_0(\xi) \right) .$$

<u>Démonstration</u>:

⊛ <u>Existence</u>: Tout d'abord, on observe que si u est défini par $u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)\right)$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \langle u(t), \bar{\phi} \rangle &= (2\pi)^{-N} \quad \langle e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi), \overline{\hat{\phi}} \rangle \\ &= (2\pi)^{-N} \quad \langle \hat{u}_0(\xi), \overline{e^{it|\xi|^2} \hat{\phi}} \rangle \end{aligned}$$

Or $e^{it|\xi|^2} \hat{\phi} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Donc $t \mapsto \langle u(t), \bar{\phi} \rangle$ est continue en temps.

De plus, soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ quelconque, et soit $T > 0$.

Par définition et d'après le calcul ci-dessus, et en utilisant l'identité $\overline{\widehat{\Phi}}(\xi)=\widehat{\Phi}(-\xi)$,

$$\langle u(T),\phi(T)\rangle-\langle u_0,\phi_0\rangle-\int_0^T\langle u(t),(\partial_t\phi-i\Delta\phi)(t)\rangle\,dt$$

$$=\langle\widehat{u}_0,e^{iT|\xi|^2}\widehat{\phi}(T,-\xi)\rangle-\langle\widehat{u}_0,\widehat{\phi}(0,-\xi)\rangle$$

$$-\int_0^T\langle\widehat{u}_0,e^{it|\xi|^2}\left(\partial_t\widehat{\phi}+i|\xi|^2\widehat{\phi}(t)\right)(-\xi)\rangle\,dt$$

$$=\langle\widehat{u}_0\,,\,e^{iT|\xi|^2}\widehat{\phi}(T,-\xi)-\widehat{\phi}(0,-\xi)-\int_0^T e^{it|\xi|^2}(\partial_t\widehat{\phi}+i|\xi|^2\widehat{\phi})(t,-\xi)\,dt$$

Or $\displaystyle\int_0^T e^{it|\xi|^2}\partial_t\widehat{\phi}(t,-\xi)\,dt$

$$=e^{iT|\xi|^2}\widehat{\phi}(T,-\xi)-\widehat{\phi(0,-\xi)}-\int_0^T i|\xi|^2e^{it|\xi|^2}\widehat{\phi}(t,-\xi)\,dt$$

Donc

$$\langle u(T),\phi(T)\rangle-\langle u_0,\phi_0\rangle-\int_0^T\langle u(t),(\partial_t\phi-i\Delta\phi)(t)\rangle\,dt$$

$$=0$$

Donc u est une solution faible de (LS).

® <u>Unicité</u> : on raisonne par dualité en supposant $u_0=0$.

Soit $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ quelconque et soit $T>0$ quelconque.

On définit $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ par

$$\widehat{\phi}(t,\xi)=e^{i(T-t)|\xi|^2}\,\widehat{\psi}(\xi)\,\chi_T(t)$$

où $\chi_T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et telle que $\chi_T \equiv 1$ sur $[0,T]$.

Alors pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\partial_t \hat{\phi} = -i|\xi|^2 \hat{\phi}, \text{ et donc } \begin{cases} \partial_t \phi - i\Delta\phi = 0 \\ \text{sur } [0,T] \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On en déduit que $\langle u(T), \psi \rangle = 0 \ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Donc $u(T) = 0$ pour tout $T > 0$ et $u \equiv 0$. ∎

Notation: Dans toute la suite, on note $S(t)$ ou $e^{it\Delta}$ l'opérateur d'évolution linéaire.

$$S(t) : u_0 \longmapsto u(t) \text{ solution de (LS).}$$

On a vu que $S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

et $S(t) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

II) Données dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq 2$:

1) Les cas extrémaux : $p=1$ et $p=2$:

Proposition :

(i) Cas $p=2$: $S(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$.

De plus, $S(t)$ est une isométrie : si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, et si $u(t) = S(t)u_0$, on a $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ et

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Cas $p=1$: $\quad S(t) : L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^N) \; (t\neq 0)$

où $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^N),\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \right\}$.

De plus, pour tout $t\neq 0$, pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\| S(t)u_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{1}{(4\pi|t|)^{N/2}} \|u_0\|_{L^1}$$

<u>Démonstration</u> : On pose $u(t) = S(t)\, u_0$ et on utilise la formule de représentation

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \longmapsto e^{-it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \right).$$

(i) Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, d'après l'égalité de Parseval,

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{N/2} \| \xi \longmapsto e^{-it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$= (2\pi)^{N/2} \| \widehat{u_0} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Par ailleurs, la continuité en temps est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée.

(ii) Montrons que si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et si $t\neq 0$, alors

$$u(t) = K(t) * u_0 :$$

– Cette formule est vraie si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ d'après la partie précédente.

– Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ quelconque, et soit $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

On pose $u_n(t) = S(t)u_0^n$.

Alors on a d'une part

$$u_n(t) = K(t) * u_0^n$$

et d'autre part

$$u_n(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-it|\xi|^2}\widehat{u_0^n}(\xi)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-i|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)}_{=u(t)} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

Comme $K(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t>0$, on en déduit que $u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(t) * u_0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Par unicité de la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a

$$u(t) = K(t) * u_0 \text{ pour tout } t>0.$$

En particulier, $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|K(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^1}$

$$\lesssim \frac{1}{(4\pi|t|)^{N/2}}\|u_0\|_{L^1}.$$

La continuité en espace de $u(t)$ vient de la continuité de $K(t)$ pour tout $t \neq 0$ et de l'application du théorème de convergence dominée.

Enfin, pour tout $R > 0$, on peut écrire

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{n/2}} \left(\int_{B_R^c} |u_0(y)|\,dy + \left| \int_{B_R} e^{-\frac{ix\cdot y}{4t}} e^{\frac{i|y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy \right| \right)$$

Comme $u_0 \in L^1$, $\lim_{R\to\infty} \int_{B_R^c} |u_0(y)|\,dy = 0$.

De plus, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{B_R} e^{-\frac{ix\cdot y}{4t}} e^{\frac{i|y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy = 0 \qquad \forall R > 0.$$

Donc $\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0 \quad \forall t \neq 0$. ■

<u>Remarque</u>: À ce stade, on a

$$S(t) : L^2 \to L^2$$

et

$$S(t) : L^1 \to L^\infty.$$

Il est tentant d'en déduire que

$$S(t) : L^p \to L^q \quad \text{pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

C'est vrai lorsque $p \in [1,2]$ par interpolation (cf paragraphe suivant), mais faux pour $p > 2$.

<u>Ref</u>: Terence Tao, «Nonlinear dispersive equations: local and global analysis», exercice 2.35.

2) Le cas $p \in]1,2[$:

Observons tout d'abord que si $u_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1,2]$, et

$$\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^1}^{\theta} \, \|u_0\|_{L^2}^{1-\theta},$$

où $\theta \in [0,1]$ est tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}$: interpolation de L^p entre L^1 et L^2.

Le résultat repose sur le théorème d'interpolation suivant :

Théorème : Soit (X_1,μ_1), (X_2,μ_2) deux espaces mesurés, et soit $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1,+\infty]$. Soit A un opérateur linéaire tel que

$$A : L^{p_0}(X_1,\mu_1) \longrightarrow L^{q_0}(X_2,\mu_2)$$

et

$$A : L^{p_1}(X_1,\mu_1) \longrightarrow L^{q_1}(X_2,\mu_2)$$

(applications continues).

Soit $\theta \in [0,1]$ quelconque. On définit p_θ, q_θ par

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Alors A envoie continûment $L^{p_\theta}(X_1,\mu_1)$ dans $L^{q_\theta}(X_2,\mu_2)$ et

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^{p_\theta}(X_1),L^{q_\theta}(X_2))} \leq \mathcal{A}_0^{1-\theta}\,\mathcal{A}_1^{\theta} \quad \text{où } \mathcal{A}_i = \|A\|_{\mathcal{L}(L^{p_i}(X_1),L^{q_i}(X_2))}$$

<u>Démonstration</u> : Les cas $\theta = 0$ et $\theta = 1$ sont triviaux. On peut donc supposer $\theta \in]0,1[$, de telle sorte que $p_\theta, q_\theta \in]1, +\infty[$. Par conséquent, il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^\infty(X_1)$, pour toute fonction $g \in L^1 \cap L^\infty(X_2)$ telles que

$$\|f\|_{L^{p_\theta}} = \|g\|_{L^{q'_\theta}} = 1 \text{, on a}$$

$$\left| \int (Af)(x_2)\, g(x_2)\, d\mu_2(x_2) \right| \leq A_0^{1-\theta} A_1^\theta .$$

Pour cela, on considère le domaine

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \},$$

et pour $z \in \overline{\Omega}$, on pose

$$f_z(x_1) := \frac{f(x_1)}{|f(x_1)|} |f(x_1)|^{p_\theta\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} \quad , x_1 \in X_1$$

et

$$g_z(x_2) := \frac{g(x_2)}{|g(x_2)|} |g(x_2)|^{q'_\theta\left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}\right)}$$

On fait alors les observations suivantes :

- Pour presque tout $x_1 \in X_1$ (resp $x_2 \in X_2$), $z \mapsto f_z(x_1)$ (resp $z \mapsto g_z(x_2)$) est holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$.
- $f_\theta = f$, $g_\theta = g$.

- Si $z = x+iy \in \Omega$ avec $x \in]0,1[$, $y \in \mathbb{R}$, on a
$$|f_z(x_1)| = |f(x_1)|^{\frac{p_\theta}{p_x}} \quad , \quad |g_z(x_2)|^{\frac{q_\theta'}{q_x'}} .$$

En particulier, supposons sans perte de généralité que $p_0 < p_1$. Alors p_x est croissant en x, et, on a :

$*$ si $x \leq \theta$: $1 \leq \frac{p_\theta}{p_x}$, et donc $f_z \in L^1 \cap L^\infty(X_1)$

$*$ si $x \geqslant \theta$: $\frac{p_\theta}{p_x} \geqslant \frac{p_\theta}{p_1}$ et donc $f_z \in L^{p_1}(X_1)$.

Idem avec $\frac{q_\theta'}{q_x'}$.

Donc dans tous les cas,
$$F(z) = \int (Af_z)(x_2)\; g_z(x_2)\; d\mu(x_2)$$
est bien défini pour $z \in \overline{\Omega}$. Les résultats classiques sur les intégrales à paramètre montrent que F est holomorphe dans Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.
De plus, si $z = k+iy$ avec $k \in \{0,1\}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}
|F(z)| &\leq \|Af_z\|_{L^{q_k}} \; \|g_z\|_{L^{q_k'}} \\
&\leq A_k \; \|f_z\|_{L^{p_k}} \; \|g_z\|_{L^{q_k'}} \\
&= A_k \; \|f\|_{L^{p_\theta}} \; \|g\|_{L^{q_\theta'}} = A_k .
\end{aligned}$$

Le même type d'estimation montre également que F est bornée sur $\overline{\Omega}$.

Posons $$\tilde{F}(z) = F(z)\, A_0^{(z-1)}\, A_1^{-z}$$

Alors $\tilde{F}$ est une fonction holomorphe sur Ω, bornée et continue sur $\overline{\Omega}$. D'après le théorème de Lindelöf (principe du maximum), on a

$$\sup_{z\in\Omega} |\tilde{F}(z)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |\tilde{F}(z)| \leq 1 \text{ par construction}$$

Donc $$\begin{cases} |F(z)| \leq A_0^{1-x}\, A_1^{x} \\ \text{pour tout } z = x+iy \in \Omega. \end{cases}$$

En particulier, en $z=\theta$, on obtient le résultat voulu. $\blacksquare$

<u>Corollaire</u> : Pour tout $p\in[1,2]$, pour tout $t\neq 0$, pour tout $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|S(t)u_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{N(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

3) <u>Estimations de Strichartz</u> :

On commence par le résultat général suivant :

Théorème (argument TT^*) :

Soit $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille bornée d'opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe $\sigma, C_0 > 0$ tels que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \ \forall (t,t') \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|U(t)U^*(t')f\|_{L^\infty} \leq \frac{C_0}{|t-t'|^\sigma} \|f\|_{L^1}$$

Alors pour tout couple $(p,q) \in [2,+\infty]^2$ tels que

$$\frac{2}{p} + \frac{2\sigma}{q} = \sigma \quad \text{et} \quad (q,\sigma) \neq (\infty, 1), \quad 2 < p < \infty,$$

il existe $C_{p,q} > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2$,

$$\|U(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_{p,q} \|u_0\|_{L^2} .$$

Démonstration : Dans toute la suite, on note $L^p(L^q)$ l'espace $L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^d))$. Par dualité et par densité, on a

$$\|U(t)u_0\|_{L^p(L^q)} = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1}) \\ \|\varphi\|_{L^{p'}(L^{q'})} \leq 1}} \left| \int (U(t)u_0)(x)\, \varphi(t,x)\, dt\, dx \right|$$

Pour abréger, on note $B_{p',q'} = \{ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1}), \|\varphi\|_{L^{p'}(L^{q'})} \leq 1 \}$.

Alors

$$\|U(t)u_0\|_{L^p(L^q)} = \sup_{\varphi\in B_{p',q'}} \left| \int u_0(x) \left(U^*(t)\varphi(t,\cdot)\right)(x)\, dt\, dx \right|$$

$$= \sup_{\varphi\in B_{p',q'}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0 \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} U^*(t)\varphi(t,\cdot)dt\right) \Big|$$

$$\leq \|u_0\|_{L^2} \sup_{\varphi\in B_{p',q'}} \left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)\varphi(t,\cdot)dt \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

On

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)\varphi(t,\cdot)dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} U^*(t)\varphi(t)\,\overline{U^*(t')\varphi(t')}\,dt\,dt'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} U(t')U^*(t)\varphi(t)\,\overline{\varphi(t')}\,dt\,dt'$$

À présent, on utilise le théorème d'interpolation du paragraphe précédent : on a

$$\|U(t')U^*(t)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C$$

et $$\|U(t')U^*(t)\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} \leq \frac{C_0}{|t-t'|^\sigma}.$$

On écrit $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty} \iff \theta = \frac{2}{q}$

et $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{\theta}{2}$

D'après le théorème du paragraphe précédent, on a

$$\|U(t')\,U^*(t)\|_{\mathcal{L}(L^{q'},L^q)} \leq C^\theta \,\frac{C_0^{1-\theta}}{|t-t'|^{\sigma(1-\theta)}}$$

$$\leq \frac{C_q}{|t-t'|^{\sigma(1-\frac{2}{q})}} \leq \frac{C_q}{|t-t'|^{2/p}}$$

par définition de p.

On en déduit que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t)\,\varphi(t,\cdot)\,dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq C_q \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{|t-t'|^{2/p}} \|\varphi(t)\|_{L^{q'}} \|\varphi(t')\|_{L^{q'}}\, dt\, dt'.$$

$$= C_q \int \frac{1}{|\cdot|^{2/p}} * \|\varphi(\cdot)\|_{L^{q'}}(t) \quad \|\varphi(t)\|_{L^{q'}}\, dt.$$

On utilise le résultat suivant (admis):

<u>Lemme</u>: Soit $\alpha \in]0,d[$ et soit $r_1, r_2 \in]1,+\infty[^2$ tels que

$$\frac{1}{r_1} + \frac{\alpha}{d} = 1 + \frac{1}{r_2}.$$

Alors il existe une constante C telle que pour tout $f \in L^{r_1}(\mathbb{R}^d)$,

$$\| |\cdot|^{-\alpha} * f \|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^d)}$$

(Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev)

Ici : on a $d=1$, $\alpha = \frac{2}{p} \in]0,1[$ par hypothèse,

et on prend $\boxed{r_1 = p'}$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{r_2} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p} - 1 = \frac{1}{p}$

$\boxed{r_2 = p}$

On obtient donc

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U^*(t) \varphi(t,\cdot)\, dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leq C_{p,q} \, \|\varphi\|^2_{L^{p'}(L^{q'})} \leq C_{p,q} \quad \blacksquare$$

Corollaire : Estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger linéaire :

Soit $(p,q) \in]2,+\infty] \times [2,+\infty[$ tels que

$$\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = \frac{N}{2}.$$

(on dit que p et q sont des exposants admissibles).

Il existe une constante $C_{p,q}$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\| S(t) u_0 \|_{L^p(L^q)} \leq C_{p,q} \, \|u_0\|_{L^2}.$$

Démonstration : On applique le théorème précédent avec $U(t) = S(t)$, en utilisant les observations suivantes :

⊛ $S(t)$ est un groupe : si $t, t' \in \mathbb{R}$, on a

$$S(t+t') = S(t)\, S(t')$$

⊛ Si $t \in \mathbb{R}$, on a $S^*(t) = S(-t)$

(Ces deux propriétés sont faciles à voir en Fourier et sont laissées en exercice).

En particulier, $S(t)$ vérifie les hypothèses du théorème T^*T, avec $\sigma = N/2$.
Le résultat suit immédiatement. (Le cas $(p,q)=(\infty,2)$ a déjà été vu.) ∎

4) Estimations de Strichartz pour l'équation non-homogène :

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'équation

$$(LSNH) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f & t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^N \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Comme ci-dessus, on commence par considérer le cas $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, et on va utiliser les estimations de Strichartz pour étendre l'étude à des termes sources et des données initiales moins régulières.

Si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, d'après la formule de Duhamel, on a

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds.$$

On va démontrer le résultat suivant :

Lemme : Soit $(p,q), (\bar{p},\bar{q}) \in [2,+\infty]^2$ deux couples d'entiers admissibles, c'est à dire tels que

$$\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = \frac{2}{\bar{p}} + \frac{N}{\bar{q}} = \frac{N}{2}, \text{ avec } p>2 \text{ ou } \bar{p}>2.$$

Soit $T>0$ et $f \in L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))$. Alors

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \right\|_{L^p([0,T],L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C_{p,q,\bar{p}',\bar{q}'} \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}.$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer le résultat pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Dans ce cas, on a tout d'abord

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \right\|_{L^{\bar{p}}([0,T],L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^N))}$$

$$= \left\| \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} \mathbb{1}_{s\in[0,T]} f(s) \right\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^N)} \right\|_{L^{\bar{p}}([0,T])}.$$

Or on sait que $\forall g \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|e^{i(t-s)\Delta} g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \text{ et } \|e^{i(t-s)\Delta} g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(4\pi|t-s|)^{N/2}} \|g\|_{L^1}$$

Donc $\displaystyle \|e^{i(t-s)\Delta} g\|_{L^q} \leq \frac{1}{(4\pi|t-s|)^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|g\|_{L^{q'}}$

$\forall q \in [2,+\infty]$ (d'après le théorème d'interpolation).

Donc

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^{\bar{p}}([0,T], L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leqslant C_{N,\bar{q}} \left\| |\cdot|^{-2/\bar{p}} * \mathbb{1}_{[0,T]} \|f(\cdot)\|_{L^{\bar{q}'}} \right\|_{L^{\bar{p}}[0,T]}$$

En utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev on obtient

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^{\bar{p}}([0,T], L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^N))}$$

$\leqslant C_{N,\bar{q}} \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}$ pour tout couple admissible $(\bar{p},\bar{q})$.

En particulier, pour tout $f \in L^{\bar{p}'}(L^{\bar{q}'})$,

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right) \overline{f(t)}\, dt \right|$$

$$\leqslant C_{N,\bar{q}} \|f\|^2_{L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}.$$

Or $\displaystyle \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right) \overline{f(t)}\, dt$

$$= \int_0^T \int_0^T \mathbb{1}_{s<t}\, e^{-is\Delta} f(s)\, \overline{e^{-it\Delta} f(t)}\, dt\, ds$$

$$= \int_0^T \int_0^T \mathbb{1}_{t<s}\, e^{-it\Delta} f(t)\, \overline{e^{-is\Delta} f(s)}\, dt\, ds$$

Donc $2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right)\overline{f(t)}\,dt\right)$

$$= \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} e^{-is\Delta} f(s)\ \overline{e^{-it\Delta} f(t)}\ dt\ ds$$

$$= \left\|\int_0^T e^{-is\Delta} f(s)\,ds\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

On en déduit que

$$\left\|\int_0^T e^{-is\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_{N,\bar{q}}\, \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}$$

Donc en appliquant les inégalités de Strichartz,

$$\left\|\int_0^T e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^p([0,T],L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$= \left\|e^{it\Delta}\left(\int_0^T e^{-is\Delta} f(s)\,ds\right)\right\|_{L^p([0,T],L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C_{p,q}\left\|\int_0^T e^{-is\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C_{p,q,\bar{p},\bar{q}}\,\|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}$$

Attention : ce n'est pas tout à fait le résultat recherché car on veut estimer

$$\int_0^T \mathbb{1}_{s<t}\, e^{i(t-s)} f(s)\, ds \ldots$$

Pour cela, il faut faire appel au lemme suivant

<u>Lemme</u> (Christ - Kiselev) : <u>ADMIS</u>.

Soit X et Y deux espaces de Banach, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $K \in \mathcal{C}(I \times I, \mathcal{L}(X,Y))$.

Soit $1 \leq r_1 < r_2 < \infty$.

On suppose que pour tout $F \in L^{r_1}(I, X)$, on a

$$\left\| \int_I K(t,s) F(s) ds \right\|_{L^{r_2}(I,Y)} \leq C \|F\|_{L^{r_1}(I,X)}$$

Alors pour tout $F \in L^{r_1}(I, X)$

$$\left\| \int_I \mathbb{1}_{s<t} K(t,s) F(s) ds \right\|_{L^{r_2}(I,Y)} \leq C \|F\|_{L^{r_1}(I,X)}$$

On applique le lemme de Christ - Kiselev avec

$$K(t,s) = \exp(i(t-s)\Delta)$$
$$Y = L^q(\mathbb{R}^N), \quad X = L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N)$$
$$r_2 = p, \quad r_1 = \bar{p}'.$$

On observe que si $p > 2$ ou $\bar{p} > 2$, on a toujours $r_1 < r_2$ ■

En utilisant le résultat ci-dessus ainsi que les estimations de Strichartz homogènes, on obtient que si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, la solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ de (LSNH) vérifie, pour tout $T \in \mathbb{R}$

$$(SNH) \quad \|u\|_{L^p([0,T], L^q(\mathbb{R}^N))} \leq C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \right),$$

pour tous couples d'exposants admissibles (p,q), $(\bar{p},\bar{q})$ tels que $p>2$ ou $\bar{p}>2$.

On étend ensuite par densité ce résultat aux données $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^{\bar{p}'}_{loc}(\mathbb{R}, L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))$ pour des solutions faibles (c'est-à-dire dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$) en étendant la définition du I) 2) :

<ins>Définition</ins> : Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$, et soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$. On dit que u est solution de (LSNH) si pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, pour tout $T \in \mathbb{R}$,

$$\langle u(T), \phi(T) \rangle - \langle u_0, \phi(0) \rangle = \int_0^T \langle u(t), (\partial_t \phi - i\Delta\phi)(t) \rangle \, dt + \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle \, dt$$

Proposition : Soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$. Alors (LSNH) admet une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration : L'unicité découle de l'unicité pour l'équation homogène. Pour l'existence, on utilise la formule de Duhamel. ∎

On en déduit en particulier que les inégalités (SNH) sont vraies pour des données $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^{\bar{p}'}_{loc}(\mathbb{R}, L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))$.

Remarque : Si u est solution de (LSNH), alors pour tout $m \in \mathbb{N}^N$, $\nabla^m u$ est solution de (LSNH) pour le terme source $\nabla^m f$ et la donnée initiale $\nabla^m u_0$. En particulier, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous couples admissibles $(p,q), (\bar{p},\bar{q})$, tels que $p>2$ ou $\bar{p}>2$,

$$\text{(SNH)} \quad \|u\|_{L^p([0,T], W^{k,q}(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \left(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T], W^{k,\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \right).$$

III) Etude de l'équation non linéaire :

Dans cette partie, on va s'intéresser au problème de Cauchy pour l'équation (NLS), avec $a \geqslant 0$, $K \in \mathbb{R}$.

Le cas $K>0$ est dit <u>défocalisant</u>, le cas $K<0$ est dit <u>focalisant</u>.

Comme pour le système de Navier-Stokes, l'idée est d'appliquer un théorème de point fixe en traitant la non linéarité $K|u|^a u$ comme un terme source.

1) <u>Remarques préliminaires: invariance d'échelle</u>:

On vérifie aisément que si u est une solution (disons régulière, ou dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ pour un certain p...) de (NLS), alors pour tout $\lambda>0$,

$$u_\lambda(t,x)=\lambda^{2/a}u(\lambda^2 t,\lambda x)$$

est solution de (NLS) pour la donnée initiale $\lambda^{2/a}u_0(\lambda\cdot)$.

Puisque (LS) conserve la norme L^2, regardons pour quelle valeur de a la norme L^2 est laissée invariante par cette transformation: on a

$$\|\lambda^{2/a}u_0(\lambda\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=\lambda^{2/a}\lambda^{-N/2}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Donc pour $\boxed{a=\frac{4}{N}}$, on a

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^N))}=\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

Plus généralement, si (p,q) est un couple d'exposants admissibles,

on a
$$\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))} = \lambda^{2/a} \lambda^{-2/p} \lambda^{-\frac{N}{q}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))}$$
$$= \lambda^{2/a} \lambda^{-N/2} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))}.$$

Si $a = \frac{4}{N}$, les normes $L^p(L^q)$ avec (p,q) admissibles sont invariantes par le changement d'échelle.

<u>Définition</u>: L'exposant $a = \frac{4}{N}$ est appelé <u>exposant critique</u> pour la norme L^2.

On rappelle que si on veut obtenir un résultat du type "existence globale à données petites", cela n'est raisonnable que dans des espaces invariants par changement d'échelle. En particulier, si on veut avoir une théorie d'existence globale pour des données petites dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on s'attend à ce que cela ne soit possible que dans le cas critique $a = \frac{4}{N}$.

Par ailleurs, on rappelle que (LS) est stable par dérivation, et préserve les normes $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \geq 0$. On peut donc également se demander pour quel exposant a la norme $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ est invariante.

On a $\|\lambda^{2/a} u_0(\lambda\cdot)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)}$

$$= \lambda^{2/a} \|\lambda (\nabla u_0)(\lambda\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \lambda^{\frac{2}{a}+1-\frac{N}{2}} \|u_0\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)}.$$

La norme $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ est donc invariante pour

$$\frac{2}{a} = \frac{N}{2} - 1, \text{ c'est-à-dire } a = \frac{4}{N-2} \quad (N>2)$$

<u>Définition</u>: L'exposant $a = \frac{4}{N-2}$ est appelé <u>exposant critique</u> pour la norme $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ $(N>2)$.

On voit que l'exposant critique pour la norme $\dot{H}^1$ est strictement plus grand que l'exposant critique pour la norme L^2 : si on s'autorise à chercher des solutions avec plus de régularité, on a droit à des non-linéarités plus fortes.

2) <u>Existence locale de solutions dans L^2 et $\dot{H}^1$</u> :

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $a \geq 0$.

a) (Théorie L^2 sous critique) : On suppose que $a < \frac{4}{N}$.

Alors il existe $T > 0$, qui ne dépend que de $\|u_0\|_{L^2}$, tel que (NLS) admet une unique solution $u \in L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout couple admissible (p,q). De plus cette solution est dans $\mathcal{C}(]-T,T[, L^2(\mathbb{R}^N))$.

b) (Théorie L^2 critique à données petites) :
On suppose que $a = \frac{4}{N}$. Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que si $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_0$, alors (NLS) admet une unique solution globale dans $L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout couple admissible (p,q). De plus cette solution est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.

c) (Théorie H^1 sous-critique)

On suppose que $\frac{4}{N} \leq a < \frac{4}{N-2}$, $N \geq 2$.

Alors il existe $T > 0$, qui ne dépend que de $\|u_0\|_{H^1}$, tel que (NLS) admet une unique solution $u \in L^p([-T,T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N))$ pour tout couple (p,q) admissible. De plus cette solution est dans $\mathcal{C}(]-T,T[, H^1)$.

De surcroît, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que si $\|u_0\|_{H^1} \leq C_0$, alors $T = +\infty$.

On va montrer ces résultats à l'aide d'un théorème de point fixe dans les espaces $L^p(L^q)$ (ou $L^p(W^{1,q})$). Pour cela, on commence par étudier les propriétés du terme non linéaire $f = \kappa |u|^a u$. On introduit également l'espace fonctionnel

$$S_T^0 = \bigcap_{\substack{(p,q)\\ \text{admissibles}}} L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N)).$$

$$S_T^1 = \bigcap_{\substack{(p,q)\\ \text{admissibles}}} L^p([-T,T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N)).$$

<u>Lemme</u> : Soit $a \geq 0$ quelconque.

a) On suppose $a \leq \frac{4}{N}$. Soit $u \in S_T^0$. On pose

$f = |u|^a u$. Soit (p,q) admissibles. Alors il existe

$\theta \in [0,1]$, avec $\theta = 0$ si et seulement si $a = \frac{4}{N}$,

tel que pour tous couples admissibles $(p_1,q_1), (p_2,q_2)$ tels que

$$\frac{1}{q_1} + \frac{a}{q_2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \right\|_{L^p((-T,T), L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C\, T^\theta \|u\|_{L^{p_1}((-T,T), L^{q_1}(\mathbb{R}^N))} \|u\|^a_{L^{p_2}((-T,T), L^{q_2}(\mathbb{R}^N))}$$

De plus, sous les mêmes hypothèses, si $v \in S^0_T$ et si $g = |v|^a v$, on a

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (f(s) - g(s))\, ds \right\|_{L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C T^\theta \|u - v\|_{L^{p_1}(L^{q_1})} \left(\|u\|^a_{L^{p_2}(L^{q_2})} + \|v\|^a_{L^{p_2}(L^{q_2})} \right).$$

b) On suppose $\frac{4}{N} \leq a < \frac{4}{N-2}$. Soit $(u,v) \in S^1_T$.

Alors pour tous couples admissibles (p,q), (p_1,q_1), (p_2,q_2),

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^p([-T,T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C \|u\|_{L^{p_1}(W^{1,q_1})} \|u\|^{a-a'}_{L^{p_2}(L^{q_2})} \|u\|^{a'}_{L^\infty(H^1)}$$

et

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (f(s) - g(s))\, ds \right\|_{L^p(W^{1,q})}$$

$$\leq C \|u - v\|_{L^{p_1}(W^{1,q_1})} \Big(\|u\|^{a-a'}_{L^{p_2}(L^{q_2})} \|u\|^{a'}_{L^\infty(H^1)}$$

$$+ \|v\|^{a-a'}_{L^{p_2}(L^{q_2})} \|v\|^{a'}_{L^\infty(H^1)} \Big).$$

Preuve :

a) On utilise les inégalités de Strichartz avec terme source. D'après le II) 4), on a

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leqslant C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \|f\|_{L^{\bar{p}'}([-T,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \quad \forall (\bar{p},\bar{q}) \text{ admissibles}$$

$$= C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \| |u|^a u \|_{L^{\bar{p}'}([-T,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}$$

$$= C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \|u\|^{a+1}_{L^{(a+1)\bar{p}'}([-T,T], L^{(a+1)\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}.$$

On choisit $\bar{q}'$ de telle sorte que $(a+1)\bar{q}' \geqslant 2$ et on interpole $L^{(a+1)\bar{q}'}$ entre L^{q_1} et L^{q_2} :

$$(*) \quad \frac{1}{(a+1)\bar{q}'} = \frac{\gamma}{q_1} + \frac{1-\gamma}{q_2}, \quad \gamma \in [0,1],$$

de telle sorte que

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N))}$$

$$\leq C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} T^{\theta} \|u\|^{(a+1)\gamma}_{L^{p_1}(L^{q_1})} \|u\|^{(a+1)(1-\gamma)}_{L^{p_2}(L^{q_2})}, \text{ où } \theta$$

est tel que $\theta + \frac{(a+1)\gamma}{p_1} + \frac{(a+1)(1-\gamma)}{p_2} = \frac{1}{\bar{p}'}$ $(**)$

En utilisant (*), (**), et le fait que (p_1, q_1), (p_2, q_2) sont admissibles, on obtient

$$\boxed{2\theta + \frac{N}{2} a = 2}$$

Donc $\theta \in [0,1] \iff a \in \left[0, \frac{4}{N}\right]$

et $\theta = 0 \iff a = \frac{4}{N}$.

Enfin, on veut que γ soit tel que $(a+1)\gamma = 1$

$\rightarrow \gamma = \frac{1}{a+1}$. Donc

$$\boxed{\frac{1}{q'} = \frac{1}{q_1} + \frac{a}{q_2}}$$

• Pour majorer $\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left(f(s) - g(s)\right) ds \right\|_{L^p(L^q)}$,

les calculs sont similaires. On pose

$$F_a(z) = |z|^a z \qquad \text{pour } z \in \mathbb{C}.$$

On montre facilement que

$$|F_a'(z)| \leq (a+1) |z|^a \quad \forall z.$$

Donc $\left|f(s) - g(s)\right| = \left|F_a(u) - F_a(v)\right|$

$$\leq (a+1) |u-v| \left(|u|^a + |v|^a\right).$$

Ensuite, les calculs sont les mêmes.

b) L'idée est sensiblement la même que ci-dessus, en utilisant de surcroît l'injection de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{2N}{N-2}},$$

et en écrivant que

$$|\nabla f| \leqslant (a+1)\, |\nabla u|\, |u|^a.$$

On a donc

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L^p(W^{1,q})}$$

$$\leqslant C_{p,q,a,\bar{p},\bar{q}} \left(\| \nabla u\, |u|^a \|_{L^{\bar{p}'}(L^{\bar{q}'})} + \| u\, |u|^a \|_{L^{\bar{p}'}(L^{\bar{q}'})} \right).$$

Ensuite, on écrit

$$\| \nabla u\, |u|^a \|_{L^{\bar{q}'}}$$

$$\leqslant \|\nabla u\|_{L^{q_1}}\, \|u\|^{a\gamma}_{L^{2N/(N-2)}}\, \|u\|^{a(1-\gamma)}_{L^{q_2}},$$

$$\leqslant C \|\nabla u\|_{L^{q_1}}\, \|u\|^{a\gamma}_{H^1}\, \|u\|^{a(1-\gamma)}_{L^{q_2}}$$

avec $$\frac{1}{q_1} + \gamma a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{(1-\gamma)\, a}{q_2} = \frac{1}{\bar{q}'} \qquad (*')$$

puis $$\| \nabla u\, |u|^a \|_{L^{\bar{p}'}(L^{\bar{q}'})}$$

$$\leqslant C T^\theta \|u\|^{a\gamma}_{L^\infty(H^1)}\, \|u\|_{L^{p_1}(W^{1,q_1})}\, \|u\|^{a(1-\gamma)}_{L^{p_2}(L^{q_2})}$$

où (p_1,q_1) (p_2,q_2) sont des couples admissibles et

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_1} + \frac{a(1-\gamma)}{p_2} + \theta \qquad (**')$$

En rassemblant $(*')$ et $(**')$, on obtient

$$\frac{2}{p'} + \frac{N}{q'} = \frac{N}{2} + N\gamma a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right) + a(1-\gamma)\frac{N}{2} + 2\theta$$

$$= \frac{N}{2} + \frac{Na}{2} - \gamma a + 2\theta = \frac{N}{2} + a\left(\frac{N}{2}-\gamma\right) + 2\theta$$

et $$\frac{2}{p'} + \frac{N}{q'} = 2\left(1-\frac{1}{p}\right) + N\left(1-\frac{1}{q}\right)$$
$$= 2 - \frac{N}{2} + N = 2 + \frac{N}{2}.$$

On obtient donc : $\boxed{a\left(\frac{N}{2}-\gamma\right) = 2(1-\theta)}$

et $\gamma \in [0,1]$, $\theta \in [0,1]$

Donc $$a < \frac{2}{\frac{N}{2}-1} = \frac{4}{N-2}.$$

Le reste de la preuve est identique au cas a). ∎

⊛ Construction du point fixe :

On fait uniquement la théorie L^2, la théorie H^1 étant très similaire et laissée au lecteur.

Soit $T>0$ (quelconque à ce stade). On se donne un couple admissible (p,q) tel que $\frac{a}{q}\in]0,\frac{1}{2}[$.

On pose
$$X_T = L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty([-T,T], L^2(\mathbb{R}^N))$$
Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ quelconque.

On considère l'application
$$\phi : \begin{array}{ccc} X_T & \longrightarrow & X_T \\ u & \longmapsto & v \end{array}$$
où v est solution de
$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = |u|^a u \\ v_{|t=0} = u_0 , \end{cases}$$
c'est-à-dire :
$$v(t) = e^{it\Delta} u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds$$
avec $f = |u|^a u$.

Alors d'après les estimations de Strichartz avec terme source et d'après le lemme précédent, on a
$$\|v\|_{X_T} \leq C_1\left(\|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^{\bar{p}'}(L^{\bar{q}'})}\right)$$
$$\leq C_1\left(\|u_0\|_{L^2} + T^\theta \|u\|^{a+1}_{X_T}\right).$$

De plus, si $u_1, u_2 \in X_T$, on a, en posant
$f_i = |u_i|^a u_i$,

$$\| \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \|_{X_T} \leq C_2 T^\theta \|u-v\|_{X_T} \left(\|u\|_{X_T}^a + \|v\|_{X_T}^a \right).$$

Les constantes C_1 et C_2 ne dépendent que de a, p, q.

- Solutions locales dans le cas sous-critique :

Si $a \in]0, \frac{4}{N}[$, on a $\theta \in]0, 1]$.

On va faire un point fixe dans la boule

$$B = \{ u \in X_T, \ \|u\|_{X_T} \leq 2C_1 \|u_0\|_{L^2} \}$$

pour des temps petits.

Il existe $T_0 > 0$ tel que :

$$\begin{cases} T_0^\theta \left(2C_1 \|u_0\|_{L^2} \right)^{a+1} \leq \|u_0\|_{L^2} \\ \text{et} \\ K := 2C_2 T_0^\theta \left(2C_1 \|u_0\|_{L^2} \right)^a < 1 \end{cases}$$

D'après les inégalités précédentes, on a, pour tout $u_1, u_2 \in B$,

$$\begin{aligned} \| \Phi(u_1) \|_{X_{T_0}} &\leq C_1 \left(\|u_0\|_{L^2} + T_0^\theta \left(2C_1 \|u_0\|_{L^2} \right)^{a+1} \right) \\ &\leq 2C_1 \|u_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

et

$$\|\phi(u_1)-\phi(u_2)\|_{X_{T_0}} \leq C_2 \|u_1-u_2\|_{X_{T_0}} T_0^{\theta}\, 2\left(2C_1\|u_0\|_{L^2}\right)^a$$

$$\leq K \|u_1-u_2\|_{X_{T_0}},$$

avec $K<1$.

Donc B est stable par ϕ et ϕ est K-lipschitzienne sur B. Par conséquent, ϕ admet un unique point fixe dans B, qui est solution de (NLS).

• Solutions globales à données petites dans le cas cubique :

Si $a=\frac{4}{N}$, on a $\theta=0$.

On cherche $\delta, \delta_0>0$ tels que si $\|u_0\|_{L^2} \leq \delta_0$, alors $B_\delta=\{u\in X_T, \|u\|_{X_T}\leq\delta\}$ est stable par ϕ et ϕ est K-lipschitzienne sur B_δ avec $K<1$.

Pour cela, il faut que :

$$\begin{cases} C_1(\delta_0+\delta^{a+1})\leq\delta \\ 2C_2\delta^a<1 \end{cases}$$

Prenons par exemple $\delta=\delta_0^{\frac{1}{a+1}}$.

Les conditions deviennent alors

$$(CP)\quad \begin{cases} 2\, C_1\, \delta_0^{\,1-\frac{1}{a+1}} \leq 1 \\ 2\, C_2\, \delta_0^{\,\frac{a}{a+1}} < 1 \end{cases}$$

Il est clair que si δ_0 est suffisamment petit, ces deux conditions sont vérifiées. On en déduit que si $\|u_0\| \leq \delta_0$ avec δ_0 vérifiant la condition de petitesse (*), alors ϕ admet un unique point fixe dans $B_{\delta_0^{\frac{1}{a+1}}}$. Notons que dans ce cas on peut prendre T arbitrairement grand : la solution est globale.

<u>Remarques</u> : 1) Les estimations de Strichartz impliquent que la solution ainsi construite est dans $L^p(L^q)$ pour tout couple admissible (p,q).
De surcroît, la formule de Duhamel et l'étude du cas linéaire montre que la solution est également dans $\mathcal{C}([-T,T], L^2(\mathbb{R}^N))$.

2) Dans le cas sous critique, le temps d'existence de la solution ne dépend que de $\|u_0\|_{L^2}$: en effet,

$$T_0 < \min\left(\frac{1}{\|u_0\|_{L^2}^a (2C_1)^{a+1}} ,\ \frac{1}{2C_2 (2C_1 \|u_0\|_{L^2})^a} \right)$$

On utilisera cette remarque au paragraphe suivant.

3) Lois de conservation et existence globale dans le cas L^2 sous-critique et dans le cas H^1 défocalisant :

a) Calculs formels :

On considère l'équation (NLS) :

$$i\partial_t u + \Delta u = \kappa |u|^a u \qquad \times \bar{u}$$

On suppose que u est une solution régulière de (NLS)

On a également

$$-i\partial_t \bar{u} + \Delta \bar{u} = \kappa |u|^a \bar{u} \qquad \times (-u)$$

$$i\int_{\mathbb{R}^N} (\partial_t u\, \bar{u} + \partial_t \bar{u}\, u) + \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\, \bar{u} - \int_{\mathbb{R}^N} \Delta \bar{u}\, u = 0$$

Donc $\quad \frac{d}{dt}\int |u|^2 = 0$:

la masse est conservée.

Conservation de l'énergie : on pose

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(t,x)\,dx + \frac{\kappa}{a+2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{a+2}(t,x)\,dx.$$

Exercice : Vérifier que pour une solution régulière u de (NLS), on a $E(t) = E(0)$ $\forall t \in I$, où I est l'intervalle de définition de la solution. On utilisera l'identité suivante :

$$\nabla(|u|^a u) = \left(1+\frac{a}{2}\right)|u|^a \nabla u + \frac{a}{2}\frac{u}{\bar{u}}|u|^a \overline{\nabla u}$$

b) Justification rigoureuse :

Proposition :

a) On suppose que $a \leq \frac{4}{N}$.
Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, et soit $u \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}^N))$ la solution de (NLS) de donnée initiale u_0.

Alors
$$\begin{cases} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \forall t \in I. \end{cases}$$

b) Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{a+2}(\mathbb{R}^N)$.
Soit $u \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (NLS) de donnée initiale u_0.

Alors
$$\begin{cases} E(t) = E(0) \\ \forall t \in I \end{cases}$$

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme : Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, et soit $f \in L^{p'}([0,T], L^{q'}(\mathbb{R}^N))$, avec (p,q) admissibles, $p>2$.
Soit u la solution de (LSNH). Alors $u \in \mathcal{C}([0,T], L^2)$ et pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 - \|u_0\|_{L^2}^2 = 2\,\mathrm{Im} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f\,\bar{u}.$$

Preuve du lemme : On commence par le cas où $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Dans ce cas, $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ et les calculs ci-dessus montrent que

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = -i \int_{\mathbb{R}^N} \left(f\bar{u} - \bar{f} u \right)$$
$$= 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} f \bar{u}.$$

Donc la formule est vraie dans ce cas.

Pour $u_0 \in L^2$ et $f \in L^{p'}(L^{q'})$ quelconques, on prend deux suites $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ pour tout n, et

$$u_0^n \longrightarrow u_0 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^N)$$
$$f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^{p'}([0,T], L^{q'}(\mathbb{R}^N)).$$

Alors la solution u_n de (LSNH) avec (u_0^n, f_n) vérifie

$$\|u_n(t)\|_{L^2}^2 - \|u_0^n\|_{L^2}^2 = 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \bar{u}_n$$

et par ailleurs, d'après les estimations du cas linéaire,

$$\|u - u_n\|_{L^\infty(L^q)} + \|u - u_n\|_{L^p(L^q)}$$
$$\leq C_{p,q} \left(\|u_0 - u_0^n\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^{p'}(L^{q'})} \right).$$

Donc on peut passer à la limite dans l'égalité d'énergie pour u_n. On en déduit le résultat voulu. ∎

Preuve de la proposition :

a) On pose $f = k|u|^a u$. Alors d'après les lemmes du III) 2), $f \in L^{p'}(L^{q'})$ pour tout couple (p,q) admissible. Donc on peut appliquer le lemme précédent. On a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f\bar{u} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2+a}$$

Donc $\mathrm{Im}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f\bar{u}\right) = 0$. On en déduit que la masse est conservée.

b) On remarque que ∇u est solution de (LSNH) avec la donnée initiale ∇u_0 et le terme source

$$\nabla(k|u|^a u) = k\left(1+\frac{a}{2}\right)|u|^a \nabla u + k\frac{a}{2}\frac{u}{\bar{u}}|u|^a \overline{\nabla u}$$

$\in L^{p'}(L^{q'})$ d'après les lemmes précédents.

On en déduit donc que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 = k\,a\,\mathrm{Im}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u}{\bar{u}}|u|^a \overline{\nabla u}\cdot\overline{\nabla u}$$

Ensuite, pour calculer $\int |u|^{a+2}(t) - \int |u_0|^{a+2}$, on utilise le même type d'astuce que dans le lemme. On prend une suite d'approximation régulière (u_0^n, ρ_n) de $(u_0, \kappa|u|^a)$, avec $\rho_n \operatorname{sgn}\kappa \geq 0$ et $\| \rho_n - \kappa |u|^a \|_{L^\alpha(L^\beta)} \to 0$, pour un certain couple $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[^2$.

On considère la solution u_n de

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \Delta u_n = f_n := \rho_n u_n \\ u_n|_{t=0} = u_0^n \end{cases}$$

On remarque que u_n est régulière, décroissante à l'infini et que $f_n \overline{u_n} = \overline{f_n} u_n = \rho_n |u_n|^2 \quad \forall n$.

Pour cette suite d'approximation régulière, on a

$$\frac{d}{dt} \int |u_n|^{a+2} = \left(1 + \frac{a}{2}\right) \int |u_n|^a \left(u_n \partial_t \overline{u_n} + \overline{u_n} \partial_t u_n\right)$$

$$= \left(1+\frac{a}{2}\right) \int |u_n|^a \left(u_n \left[i\overline{f_n} - i\overline{\Delta u_n} \right] + \overline{u_n}\left(-if_n + i\Delta u_n\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{a}{2}\right) i \int |u_n|^a \cancel{\left(u_n \overline{f_n} - \overline{u_n} f_n\right)}$$

$$+ \left(1+\frac{a}{2}\right) i \int \overline{\nabla u_n} \left(\cancel{\left(1+\frac{a}{2}\right) |u_n|^a} \nabla u_n + \frac{a}{2} \frac{u_n}{\overline{u_n}} |u_n|^a \overline{\nabla u_n} \right)$$

$$- \left(1+\frac{a}{2}\right) i \int \nabla u_n \left(\cancel{\left(1+\frac{a}{2}\right) |u_n|^a} \overline{\nabla u_n} + \frac{a}{2} \frac{\overline{u_n}}{u_n} |u_n|^a \nabla u_n \right)$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t)|^{a+2} - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{a+2}$$

$$= -a\left(1+\frac{a}{2}\right) \operatorname{Im} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\nabla u_n} \cdot \overline{\nabla u_n} \, \frac{u_n}{\overline{u_n}} |u_n|^a$$

On passe ensuite à la limite quand $n \to \infty$, ce qui est légitime car
$$u_n \to u \quad \text{dans } \mathcal{C}([0,T], L^p)$$
pour tout $p \in [2, 2^*]$ et $a+2 < 2^*$.

En rassemblant les termes, on obtient
$$E(t) = E(0) \text{ pour tout } t \in [0,T]. \quad \blacksquare$$

<u>Corollaire</u> : (Existence globale de solutions dans les cas sous-critiques)

a) Soit $a \in [0, \frac{4}{N}[$. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors (NLS) admet une unique solution <u>globale</u> $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout (p,q) admissibles. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

b) Soit $a \in \left[0, \frac{4}{N-2}\right[$ $\left(a \in \left[\frac{4}{N}, +\infty\right[\text{ si } N=1,2\right)$

Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $K > 0$ (cas défocalisant). Alors (NLS) admet une unique solution globale dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}, W^{1,q}(\mathbb{R}^N))$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$E(t) = E(u_0)$$

Démonstration :

a) D'après le paragraphe précédent, il existe $T_0 > 0$, ne dépendant que de $\|u_0\|_{L^2}$ tel que (NLS) admette une unique solution $u \in \mathcal{C}([-T_0,T_0], L^2) \cap L^p([-T_0,T_0], L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout (p,q) admissibles.

De plus, la propriété de conservation de la masse implique que $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ $\forall t \in [-T_0, T_0]$.

On considère à présent le problème de Cauchy pour (NLS) en T_0 (resp. $-T_0$), avec pour donnée initiale $u(T_0)$ (resp $u(-T_0)$). De nouveau, on peut trouver une unique solution locale, notée u^1 (resp. u^{-1}).
Puisque $\|u(T_0)\|_{L^2} = \|u(-T_0)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, celles-ci sont définies sur $[0, 2T_0]$ (resp $[-2T_0, T_0]$).

De plus, l'unicité de la solution dans $[0,T_0]$ implique que $u(t) = u^1(t)$ $\forall t \in [0,T_0]$
(resp. $u(t) = u^{-1}(t)$ $\forall t \in [-T_0, 0]$).
On peut donc étendre la solution u à

l'intervalle $[-2T_0, 2T_0]$. On itère ce procédé ; à l'étape n, on obtient une solution définie sur $[-nT_0, nT_0]$, dont la norme L^2 est conservée. On peut donc la prolonger sur un intervalle dont la taille ne dépend que de $\|u_0\|_{L^2}$, et on obtient une solution définie sur $[-(n+1)T_0, (n+1)T_0]$. Finalement, on obtient une solution globale.

<u>Attention !</u> A priori, $u \notin L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$, mais seulement à $L^p_{loc}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$. Plus précisément,

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|u\|_{L^p([n,n+1], L^q(\mathbb{R}^N))} < +\infty.$$

b) Tout d'abord, il existe $T_1 > 0$, ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^1}$, tel que (NLS) admette une unique solution dans $\mathcal{C}([-T_1, T_1], H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p([-T_1, T_1], W^{1,q}(\mathbb{R}^N))$.

De plus, d'après les lemmes du paragraphe 2), on a $u|u|^a \in L^{p'}([-T_1, T_1], L^{q'}(\mathbb{R}^N))$ pour certains couples admissibles (p', q'), donc la masse est conservée :

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad \forall t \in [-T_1, T_1].$$

D'après la proposition précédente, l'énergie est également conservée :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t)|^2 + \dfrac{2K}{a+2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{a+2} = E(u_0) \\ \forall t \in [-T_1, T_1]. \end{cases}$$

Supposons $K > 0$. On en déduit que pour tout $t \in [-T_1, T_1]$,

$$\|u(t)\|_{L^2} + \|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + E(u_0)^{1/2}.$$

On considère le problème de Cauchy en $t = T_1$ (resp $t = -T_1$). Il existe $T_1' > 0$ ($T_1' < T_1$ a priori, car $E(u_0) \geq \|\nabla u_0\|_{L^2}$), tel que (NLS) admette une unique solution sur $[T_1 - T_1', T_1 + T_1']$ (resp. $[-T_1 - T_1', -T_1 + T_1']$). De plus, on a

$$\begin{cases} E(t) = E(u_0) \\ \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \end{cases} \quad \forall t \in [-T_1 - T_1', T_1 + T_1']$$

On itère ce procédé et on en déduit l'existence d'une solution sur $[-T_1 - nT_1', T_1 + nT_1']$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{R}$. ∎

Remarque: Ce raisonnement ne s'applique pas au cas focalisant $K < 0$, puisque dans ce cas la conservation de l'énergie ne donne pas de borne sur $\|\nabla u\|_{L^2}$. Dans le cas défocalisant, des phénomènes d'explosion peuvent apparaître, qui feront l'objet du chapitre suivant.